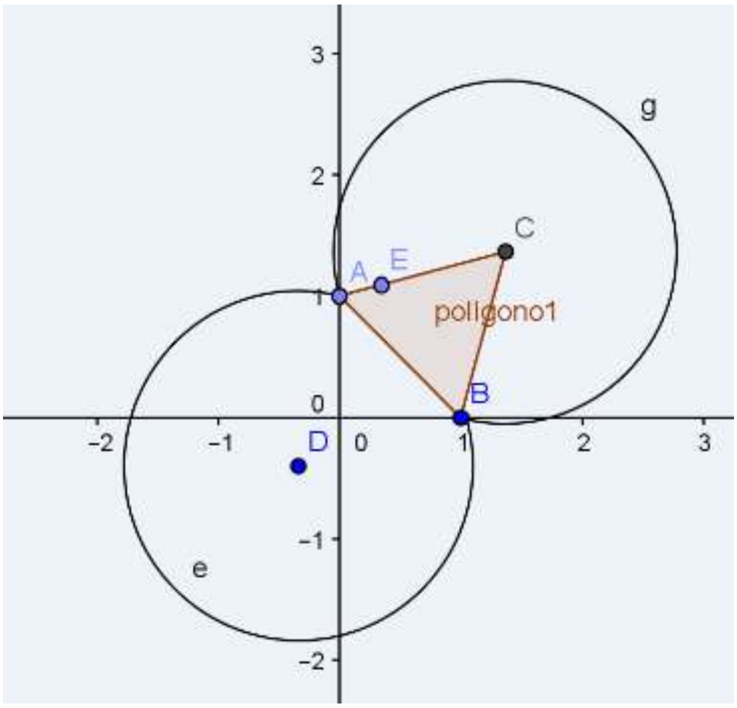
c/ Corazón de María, 15
28002 Madrid
91 413 43 16
www.oposicionesatp.com

Ejercicios resueltos:

1. **(Madrid oposiciones 2014). Un segmento rectilíneo *AB* de longitud *L* se apoya sobre los semiejes coordenados positivos.**
   Determine el lugar geométrico de los puntos desde los que se ve el segmento *AB* bajo un ángulo de 30º cuando dicho segmento forma un triángulo isósceles en el primer cuadrante.

Es el arco capaz de 30º sobre el segmento A($\frac{\sqrt{2}}{2}$L,0) y B(0, $\frac{\sqrt{2}}{2}$L), es decir son dos arcos de circunferencia con centros en C y D y desde el centro de cada circunferencia se vería el segmento AB bajo un ángulo de 60º. Por lo tanto el triángulo ABC sería equilátero. Para el cálculo de los centros y el radio se usa trigonometría básica del triángulo equilátero.

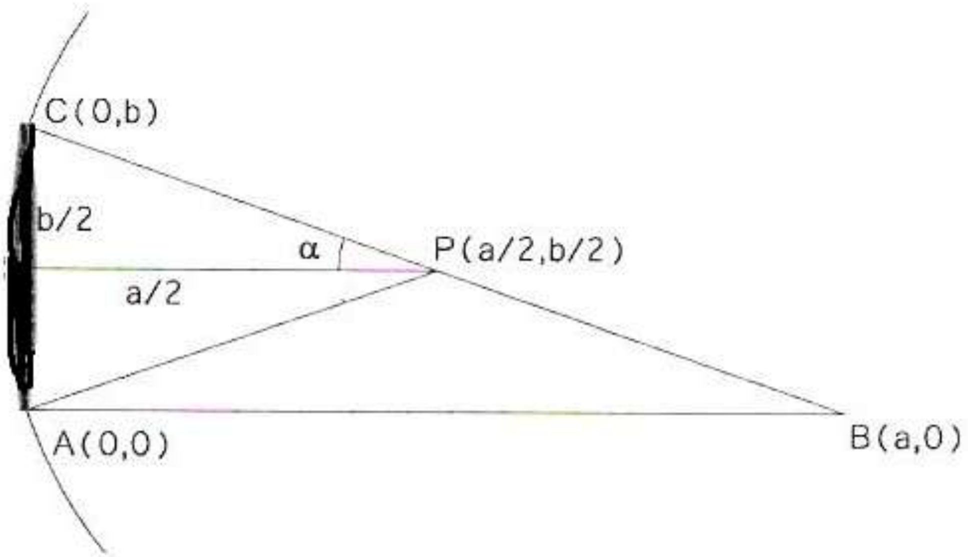


c/ Corazón de María, 15
28002 Madrid
91 413 43 16
www.oposicionesatp.com

2. **En un triángulo rectángulo el cateto AB es constante de longitud a, siendo el otro cateto AC variable de longitud b. En la circunferencia circunscrita al triángulo sea S el área del menor de los segmentos circulares determinados por el cateto AC. Hallar:**

$$\lim_{b \to 0} \frac{S}{b^3}$$

Dibujo:



A 2π radianes corresponde un área es πr^2 ,luego a 2α radianes le corresponde un área de $\boldsymbol{\alpha}\, \mathbf{r^2}$, además el radio es la distancia de P a C, por tanto:

tg $\alpha = \frac{b/2}{a/2} = \frac{b}{a}$ luego $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$, $r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ y área triángulo APC = $\frac{a\,b}{4}$ por lo

tanto el área del segmento circular es:

$S = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right) - \frac{a\,b}{4}$ aplicando dos veces la regla de

L' Hôpital

c/ Corazón de María, 15
28002 Madrid
91 413 43 16
www.oposicionesatp.com

$$\lim_{b\to 0}\frac{S}{b^3}=\lim_{b\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(\frac{b}{a})\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2\right)-\frac{a\,b}{4}}{b^3}$$

$$=\lim_{b\to 0}\frac{(a^2+b^2)\cdot arctg\frac{b}{a}-ab}{4b^3}=L'H$$

$$=\lim_{b\to 0}\frac{2b\cdot arctg\frac{b}{a}+(a^2+b^2)\cdot\frac{a^2}{(a^2+b^2)}\cdot\frac{1}{a}-a}{12b^2}$$

$$=\lim_{b\to 0}\frac{2b\cdot arctg\frac{b}{a}+a-a}{12b^2}=\lim_{b\to 0}\frac{arctg\frac{b}{a}}{6b}$$

$$=\lim_{b\to 0}\frac{\frac{a^2}{(a^2+b^2)}\cdot\frac{1}{a}}{6}=\frac{1}{6a}$$

3. Comprobar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ es convergente, y en caso de serlo, calcular su suma.

Aplicaremos el criterio del cociente que dice que si el $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ es menor que 1 entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ converge.

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{2n^2}=\frac{1}{2}.$

Para el cálculo del límite vamos a hallar el límite de

$S_n=\frac{1}{2}+\frac{4}{2^2}+\frac{9}{2^3}+\cdots+\frac{n^2}{2^n}$

Restamos $S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}-\frac{n^2}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}S_n$

Restando $\frac{1}{2}S_n-\frac{1}{4}S_n$

obtenemos $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{2}{2^n}-\frac{n^2+2n-1}{2^{n+1}}-\frac{n^2}{2^{n+2}}=\frac{1}{4}S_n$

Multiplicando por 4 tenemos :

$S_n=2+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-3}}-\frac{4(n^2+2n-1)}{2^{n+1}}-\frac{4n^2}{2^{n+2}}$

y tomando límites resulta: 2+2+1+1-0-0 = 6

4. Hallar un número de cinco cifras diferentes que sea igual a la suma de todos los de tres cifras que se pueden obtener formando todas las variaciones ordinarias de dichas cinco cifras tomadas de tres en tres.

Supongamos que N = $x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5$ es el número pedido con x_1 □□0, porque si no, no tendría cinco cifras.
Como con esas cinco cifras queremos formar números de tres cifras se tiene que hay V5,3 = 60 posibilidades, de las cuales hay 12 que tienen una cifra determinada en una posición determinada. Luego la suma de las unidades + decenas incluidas las que me llevo…etc. nos queda:

$12(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + 12(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \cdot 10 +$

$+ 12(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \cdot 100 = 1332(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$

y por lo tanto:

$N = 1332(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$

Entonces N es múltiplo de 9 porque 1332 lo es, y utilizando el criterio de divisibilidad del 9 se tiene que: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9t$ y dado que todas las cifras son distintas entre sí, su suma estará entre:

$1 + 2 + 3 + 4 + 0 = 10$ y $5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 35$
luego $10 \leq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 35$, esto es $10 \leq 9t \leq 35$
Por lo tanto los únicos valores posibles de t son t = 2 y t = 3.
Si t = 2 entonces $N = 1332 \cdot 9 \cdot 2 = 23976$, y como la suma de sus cifras es $27 \neq 18 = 9 \cdot 2$ entonces contradice que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9t$
Este número no es el buscado.
Si t = 3 entonces $N = 1332 \cdot 9 \cdot 3 = 35964$ y como
$3 + 5 + 9 + 6 + 4 = 27 = 9 \cdot 3$ entonces N = 35964 solución del problema.

5. En un armario hay n pares de zapatos distintos, es decir, cada par es diferente de los restantes pares. Se toman r zapatos al azar. Se pide la probabilidad de que entre los zapatos elegidos aparezcan exactamente h pares.

El número de casos posibles es $\binom{2n}{r}$ que son el número de combinaciones de 2n elementos tomados de r en r.
El número de casos favorables viene dado por:
· Primero elegimos h pares entre los n que hay, esto es: $\binom{n}{h}$

· En segundo lugar debemos elegir entre los (n – h) pares que quedan los
r – 2h de los cuales vamos a sacar un zapato de cada uno, esto es:

$$\binom{n-h}{r-2h}$$

· Y por último, hay 2^{r-2h} formas de elegir un zapato de los dos que hay en cada par, de manera que nunca elijamos un par completo.
Entonces hay

$$2^{r-2h}\binom{n}{h}\binom{n-h}{r-2h}$$ casos favorables.

y la probabilidad viene dada por:

$$\frac{2^{r-2h}\binom{n}{h}\binom{n-h}{r-2h}}{\binom{2n}{r}}$$